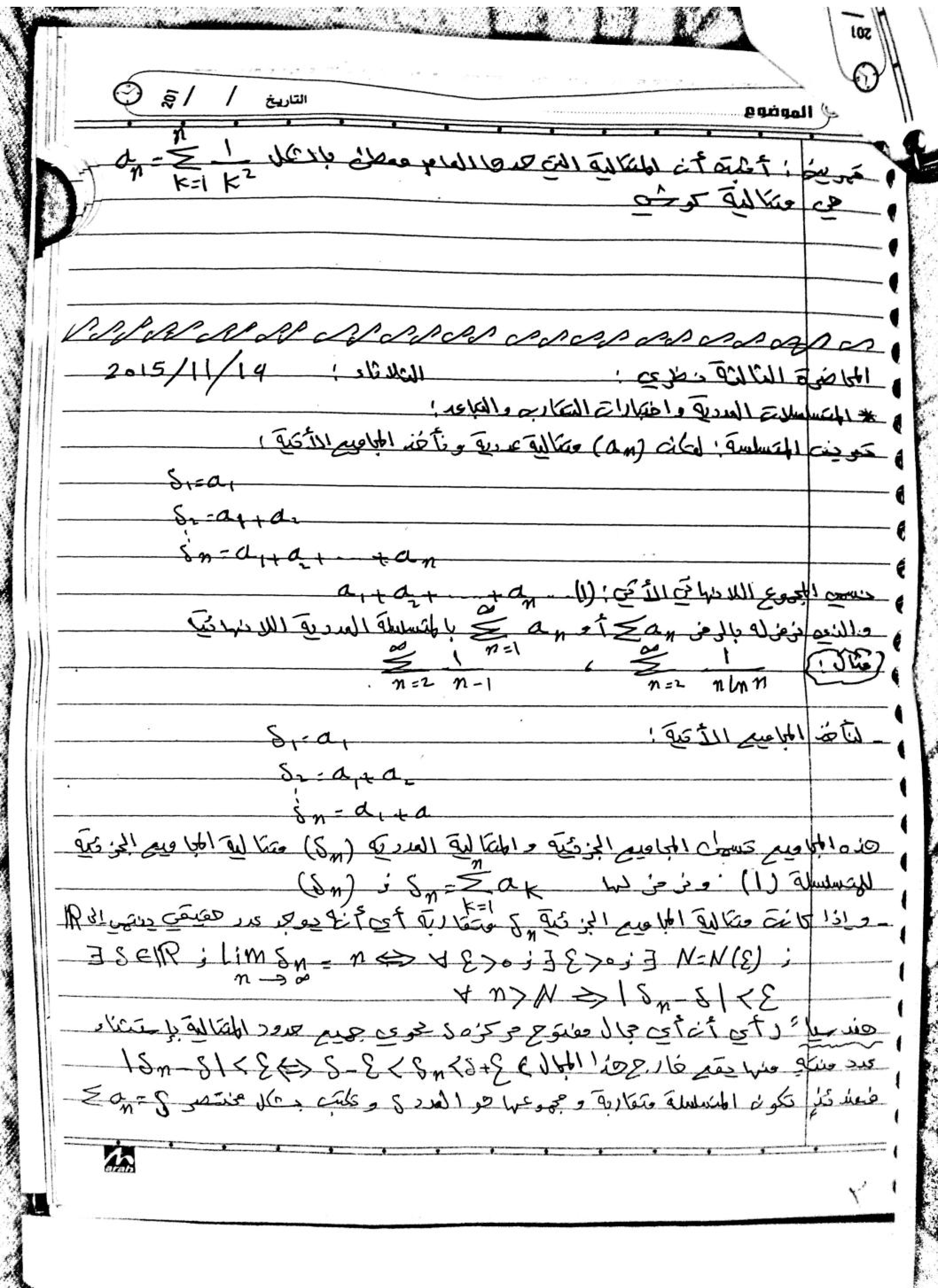


تمرين: أثبت أن المتتالية التي حدها العام معطى بالشكل $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ هي متتالية كوشي

المحاضرة الثالثة نظري : الثلاثاء : 2015/11/14

* المتسلسلات العددية واختبارات التقارب والتباعد :

تعريف المتسلسلة : لتكن (a_n) متتالية عددية ونأخذ المجاميع الآتية :

$S_1=a_1$

$S_2=a_1+a_2$

$\vdots$

$S_n=a_1+a_2+\dots+a_n$

نسمي المجموع اللانهائي الآتي : (1) $a_1+a_2+\dots+a_n+\dots$

والذي نرمز له بالرمز $\sum a_n$ أو $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بالمتسلسلة العددية اللانهائية

مثال : $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ ، $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$.

- لنأخذ المجاميع الآتية :

$S_1=a_1$

$S_2=a_1+a_2$

$\vdots$

$S_n=a_1+a$

هذه المجاميع تسمى المجاميع الجزئية والمتتالية العددية (S_n) متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة (1) ونرمز لها (S_n) ؛ $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$

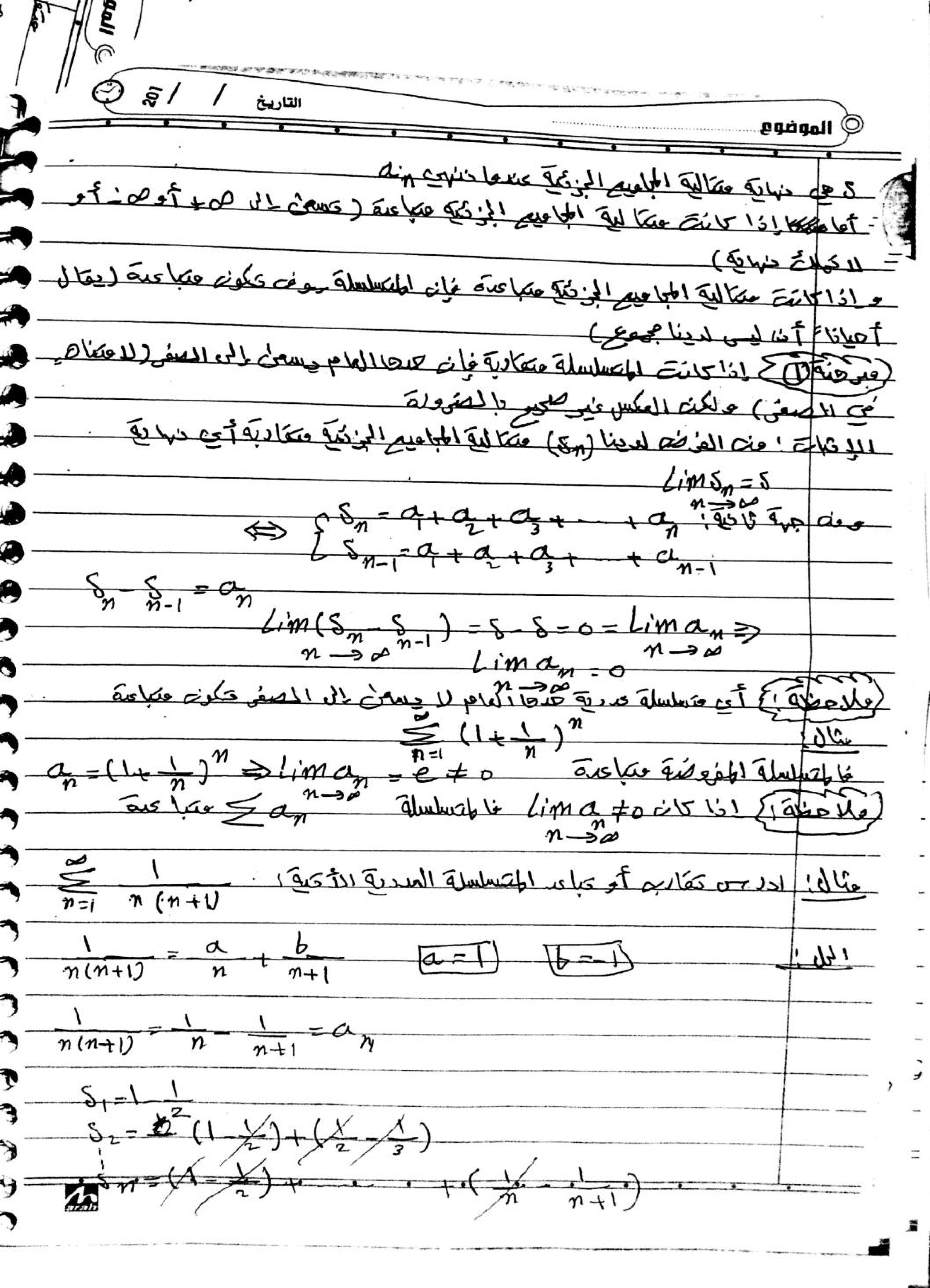
- وإذا كانت متتالية المجاميع الجزئية S_n متقاربة أي أنه يوجد عدد حقيقي ينتمي إلى $\mathbb{R}$

$\exists S\in\mathbb{R}\ ;\ \lim_{n\to\infty} S_n = S \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ ;\ \exists N=N(\varepsilon)\ ;$

$\forall n>N \Rightarrow |S_n-S|<\varepsilon$

هندسياً : أي أنه أي مجال مفتوح مركزه S يحوي جميع حدود المتتالية باستثناء عدد منته منها يقع خارج هذا المجال $|S_n-S|<\varepsilon \Leftrightarrow S-\varepsilon<S_n<S+\varepsilon$

عندئذ تكون المتسلسلة متقاربة ومجموعها هو العدد S ونكتب بشكل مختصر $\sum a_n=S$



S هي نهاية متتالية المجاميع الجزئية عندما تنتهي a_n

- أما إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية متباعدة (تسعى إلى $+\infty$ أو $-\infty$ أو لا تملك نهاية)

وإذا كانت متتالية المجاميع الجزئية متباعدة فإن المتسلسلة سوف تكون متباعدة (يقال أحيانًا أننا ليس لدينا مجموع)

مبرهنة (1): إذا كانت المتسلسلة متقاربة فإن حدها العام يسعى إلى الصفر (لا متناهٍ في الصغر) ولكن العكس غير صحيح بالضرورة

البرهان: من الفرض لدينا (S_n) متتالية المجاميع الجزئية متقاربة أي نهاية

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

ومن جهة ثانية:

$$\begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \\ S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$S_n - S_{n-1} = a_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0 = \lim_{n\to\infty} a_n \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

ملاحظة: أي متسلسلة عددية حدها العام لا يسعى إلى الصفر تكون متباعدة

مثال:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = e \neq 0$ فالمتسلسلة المفروضة متباعدة

ملاحظة: إذا كان $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ فالمتسلسلة $\sum a_n$ متباعدة

مثال: ادرس تقارب أو تباعد المتسلسلة العددية الآتية:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

الحل:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} \qquad \boxed{a=1} \qquad \boxed{b=-1}$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = a_n$$

$$S_1 = 1 - \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$$

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

متقاربة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ $\Leftarrow$ $\lim_{n\to\infty} S_n = 1$ $\Leftarrow$ $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$

ومجموعها $S = 1$

مثال ٤: ادرس تقارب أو تباعد السلسلة العددية الآتية: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$

المطلوب أوجد (S_n) ثم بين أن هذه المتسلسلة متباعدة

الحل: نضع: $S_1 = a_1$; $S_2 = a_1 + a_2 = 0$

$$(S_n) \quad \begin{cases} S_1 = 1 \\ S_2 = 0 \\ S_3 = 1 \\ \vdots \end{cases}$$

$$(S_n) = \begin{cases} 0 \; ; & n \text{ زوجي} \\ 1 \; ; & n \text{ فردي} \end{cases}$$

إذاً السلسلة $(-1)^{n-1}$ متباعدة

- أي متسلسلة عددية حدها العام لا يسعى إلى الصفر أو لا يملك نهاية تكون متباعدة

* المتسلسلة الهندسية: $\sum_{n=0}^{\infty} a q^n$ ، $a, q \in \mathbb{R}$ ، $a \neq 0$

حيث الأول هو الحد a أما q فهذه المتسلسلة تكون متقاربة فقط وفقط إذا كان $|q| < 1$ وتكون متباعدة من أجل $|q| \geq 1$

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^n$$
$$q S_n = aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n+1}$$
$$S_n(1-q) = a(1-q^{n+1}) \Rightarrow S_n = \frac{a(1-q^{n+1})}{1-q}$$

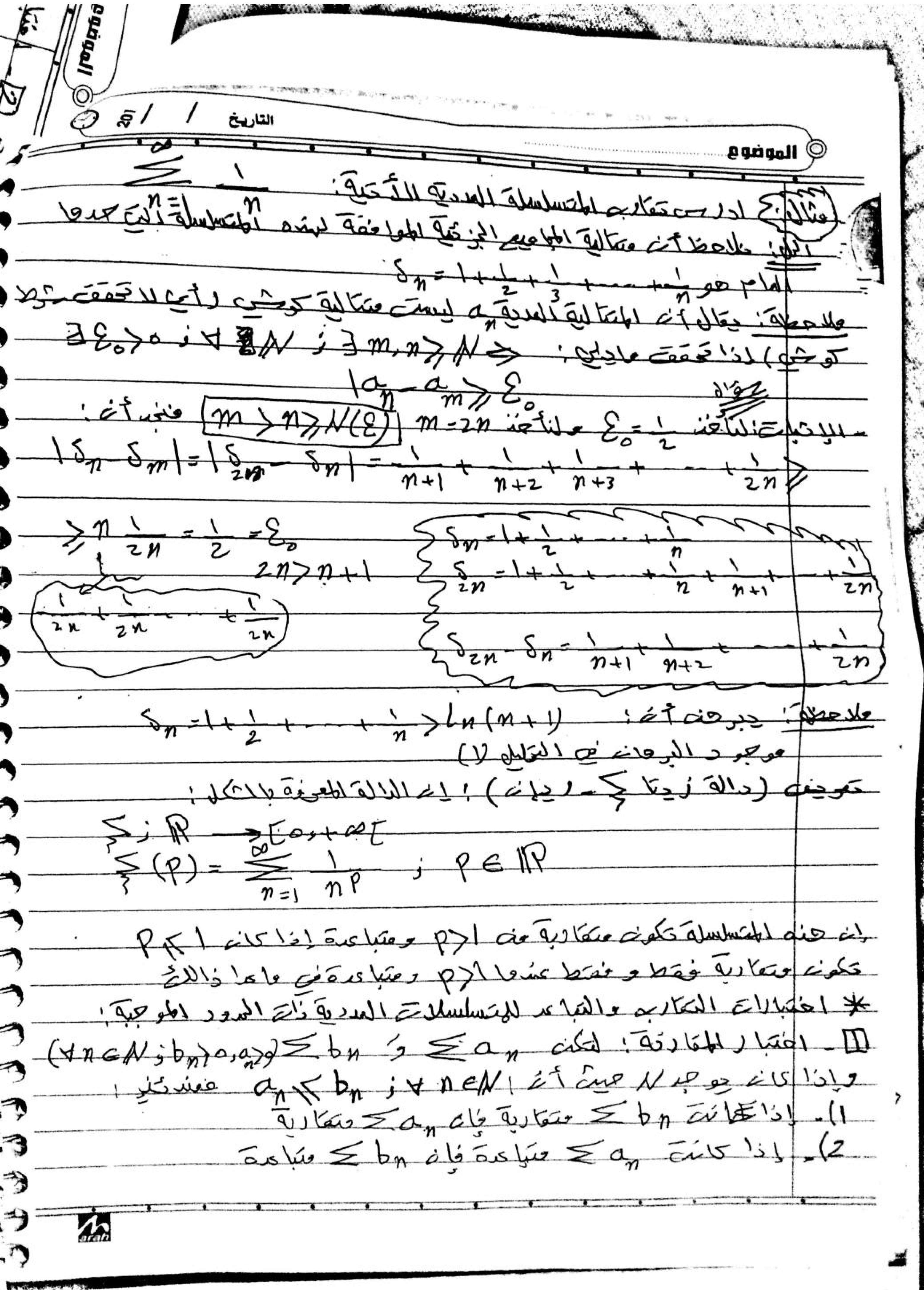
وهنا نميز حالتين: ١- $|q| < 1$ فإن: $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q} \quad ; \quad |q| < 1$$

٢- إذا كان $|q| \geq 1$ فالمتسلسلة متباعدة لأن $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$

$$\left\{ S_n = a + a + \dots + a = n+1 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} n+1 = \infty \right.$$

مما تقدم نخلص إلى النتيجة الآتية: المتسلسلة الهندسية المفروضة تكون متقاربة من أجل $|q| < 1$ علماً أن مجموعها يساوي: $\frac{a}{1-q}$ أما من أجل $|q| \geq 1$ فهي متباعدة



التاريخ / / 201

الموضوع

مثال (3): ادرس تقارب المتسلسلة العددية الآتية: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

الحل: نلاحظ أن متتالية المجاميع الجزئية الموافقة لهذه المتسلسلة التي حدها العام هو $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

ملاحظة: يقال أن المتتالية العددية a_n ليست متتالية كوشي (أي لا تحقق شرط كوشي) إذا تحقق ما يلي: $\exists \varepsilon_0 > 0 ; \forall N ; \exists m,n \geq N \Rightarrow$

$$|a_n - a_m| \geq \varepsilon_0$$

- بالتطبيق نأخذ $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ ونأخذ $m = 2n$ $(m > n \geq N(\varepsilon))$ فنجد أن:

$$|S_n - S_m| = |S_{2n} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} \geq$$

$$\geq n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2} = \varepsilon_0$$

$2n > n+1$

$\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\dots+\frac{1}{2n}$

$S_n = 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}$

$S_{2n} = 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n}$

$S_{2n}-S_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}$

ملاحظة: يبرهن أن: $S_n = 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n} > \ln(n+1)$

موجود البرهان في التكامل (1)

تعريف (دالة زيتا ζ - ريمان): إن الدالة المعرفة بالشكل:

$$\zeta : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$$

$$\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} ; p\in\mathbb{R}$$

إن هذه المتسلسلة تكون متقاربة من أجل $p>1$ ومتباعدة إذا كان $p \leq 1$ أي تكون متقاربة فقط وفقط عندما $p>1$ ومتباعدة فيما عدا ذلك.

* اختبارات التقارب والتباعد للمتسلسلات العددية ذات الحدود الموجبة:

[1] - اختبار المقارنة: لتكن $\sum a_n$ و $\sum b_n$ $(\forall n\in N ; b_n>0, a_n>0)$

وإذا كان يوجد N حيث أن $\forall n \in N ; a_n \leq b_n$ فعندئذٍ:

1) - إذا كانت $\sum b_n$ متقاربة فإن $\sum a_n$ متقاربة

2) - إذا كانت $\sum a_n$ متباعدة فإن $\sum b_n$ متباعدة



(2) - اختبار نهاية النسبة: لتكن $\sum a_n$ و $\sum b_n$ $(\forall n\in N;\ b_n>0, a_n>0)$

وإذا كان: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum a_n}{\sum b_n} = K$ فإننا نميز الحالات الآتية:

أ- إذا كان $0<K<+\infty$ فالمتسلسلتين من طبيعة واحدة (متقاربتان معاً أو متباعدتان معاً)

ب- إذا كان $K=0$ من تقارب $\sum b_n$ ينتج تقارب $\sum a_n$ ومن تباعد $\sum a_n$ ينتج تباعد $\sum b_n$

ج- إذا كان $K=\infty$ من تقارب $\sum a_n$ ينتج تقارب $\sum b_n$ ومن تباعد $\sum b_n$ ينتج تباعد $\sum a_n$

أمثلة: ادرس تقارب أو تباعد المتسلسلات الآتية: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \Rightarrow 0<K=1<\infty$

$\sum \frac{1}{n}$ متباعدة $\Rightarrow \sum \sin\frac{1}{n}$ متباعدة

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = 1$, $\sum \frac{1}{n^2}$ متقاربة $\Rightarrow$ متقاربة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$

ملاحظة: إن تباعد السلسلتين العدديتين التاليتين $\sum a_n$ و $\sum b_n$ لا يعني بالضرورة تباعد المتسلسلة الناتجة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \mp b_n)$

مثال: متباعدة $\sum \frac{1}{n+1}$ و $\sum \frac{1}{n}$ متباعدة

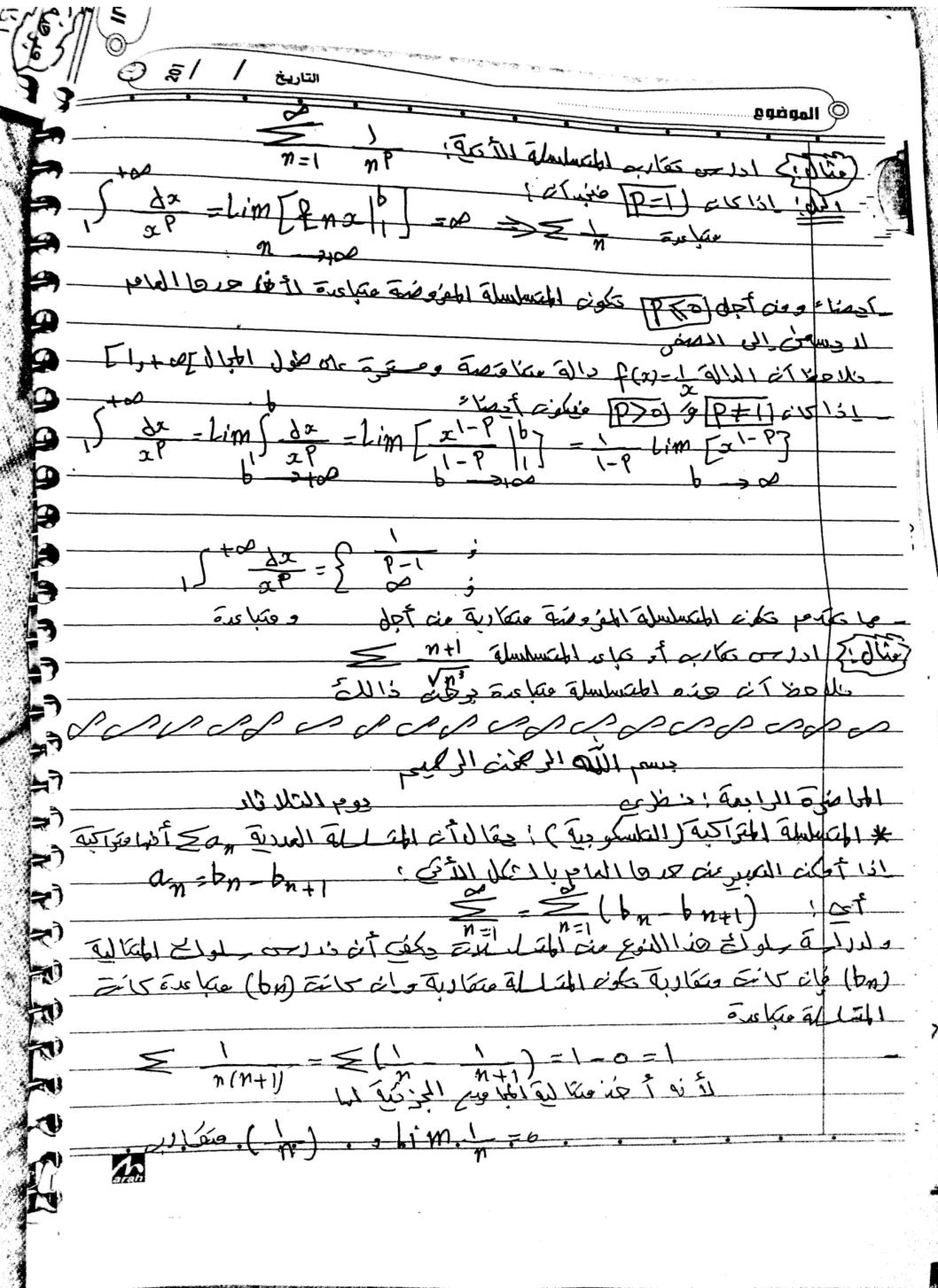
$\sum\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ متقاربة

مثال (2): متباعدة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة

$\sum\left(\frac{1}{n}+\left(\frac{-1}{n}\right)\right)=0$

(3) - الاختبار التكاملي: لتكن $\sum a_n$ متسلسلة عددية ذات حدود موجبة $\sum a_n$ أي $\forall n\in N;\ a_n>0$ و لتكن f دالة مستمرة وغير متزايدة على المجال $[1,+\infty[$ بحيث أن $f(n)=a_n$ $\forall n\in N$ عندئذٍ تكون المتسلسلة المفروضة متقاربة إذا وفقط إذا تقارب التكامل المعتل $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$

كما أن هذه المتسلسلة تكون متباعدة إذا وفقط إذا كان هذا التكامل متباعد



التاريخ / / 201

الموضوع

مثال: ادرس تقارب المتسلسلة الآتية: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

الحل: إذا كان $\boxed{p=1}$ فيكون:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{n \to +\infty} \left[\ln x \Big|_1^b \right] = \infty \Rightarrow \sum \frac{1}{n} \text{ متباعدة}$$

أيضاً ومن أجل $\boxed{p \leq 0}$ تكون المتسلسلة المفروضة متباعدة لأن حدها العام لا يسعى إلى الصفر

نلاحظ أن الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ دالة متناقصة ومستمرة على طول المجال $[1, +\infty[$

إذا كان $\boxed{p \neq 1}$ و $\boxed{p > 0}$ فيكون أيضاً:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^b \right] = \frac{1}{1-p} \lim_{b \to \infty} \left[x^{1-p} \right]$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & ; \\ \infty & ; \end{cases}$$

- مما تقدم تكون المتسلسلة المفروضة متقاربة من أجل و متباعدة

مثال: ادرس تقارب أو تباعد المتسلسلة $\sum \frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$

نلاحظ أن هذه المتسلسلة متباعدة برهن ذلك

بسم الله الرحمن الرحيم

المحاضرة الرابعة: نظري — يوم الثلاثاء

* المتسلسلة المتراكبة (التلسكوبية): يقال أن المتسلسلة العددية $\sum a_n$ أنها متراكبة إذا أمكن التعبير عن حدها العام بالشكل الآتي: $a_n = b_n - b_{n+1}$

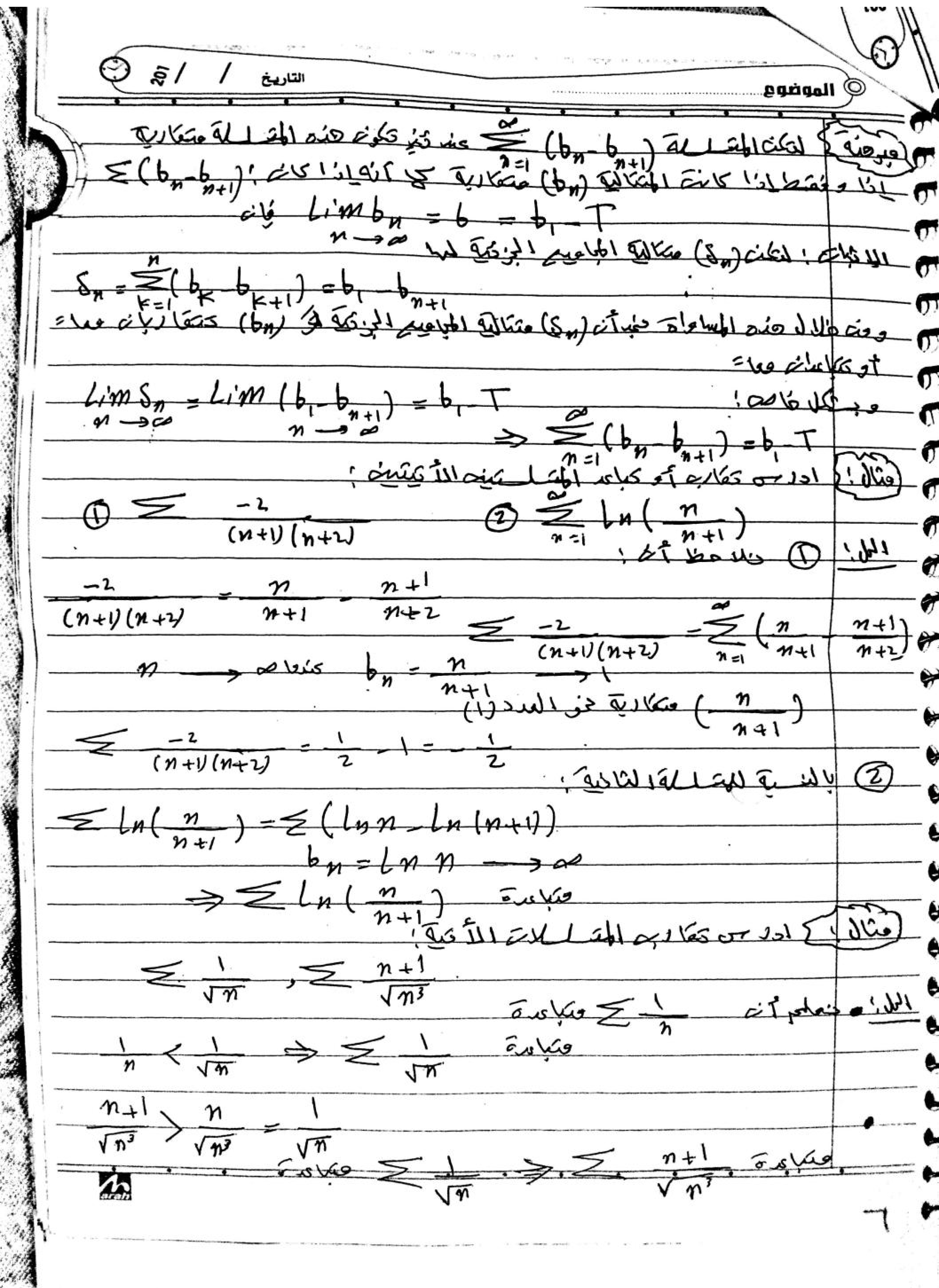
أي: $\sum_{n=1}^{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$

ولدراسة سلوك هذا النوع من المتسلسلات يكفي أن ندرس سلوك المتتالية (b_n) فإن كانت متقاربة تكون المتسلسلة متقاربة وإن كانت (b_n) متباعدة كانت المتسلسلة متباعدة

$$\sum \frac{1}{n(n+1)} = \sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - 0 = 1$$

لأنه أخذنا متتالية المجاميع الجزئية لها

$\left(\frac{1}{n}\right)$ متقاربة ، $\lim \frac{1}{n} = 0$



مبرهنة: لتكن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$ عند تميز تكون هذه المتسلسلة متقاربة إذا وفقط إذا كانت المتتالية (b_n) متقاربة في الواقع إذا كانت $\sum(b_n - b_{n+1})$: فإن

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b = b_1 - T$$

الإثبات: لتكن (S_n) متتالية المجاميع الجزئية لها

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1}$$

ومن خلال هذه المساواة نجد أن (S_n) متتالية المجاميع الجزئية و (b_n) متقاربتان معاً أو متباعدتان معاً

وبشكل خاص:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(b_1 - b_{n+1}) = b_1 - T$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1}) = b_1 - T$$

مثال: ادرس تقارب أو تباعد المتسلسلتين الآتيتين:

① $\sum \frac{-2}{(n+1)(n+2)}$ ② $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

الحل: ① نلاحظ أن:

$$\frac{-2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2}$$

$$\sum \frac{-2}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2}\right)$$

$b_n = \frac{n}{n+1} \longrightarrow 1$ عندما $n \longrightarrow \infty$

$\left(\frac{n}{n+1}\right)$ متقاربة نحو العدد (1)

$$\sum \frac{-2}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

② بالنسبة للمتسلسلة الثانية:

$$\sum \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \sum(\ln n - \ln(n+1))$$

$$b_n = \ln n \longrightarrow \infty$$

$\Rightarrow \sum \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ متباعدة

مثال: ادرس تقارب المتسلسلات الآتية:

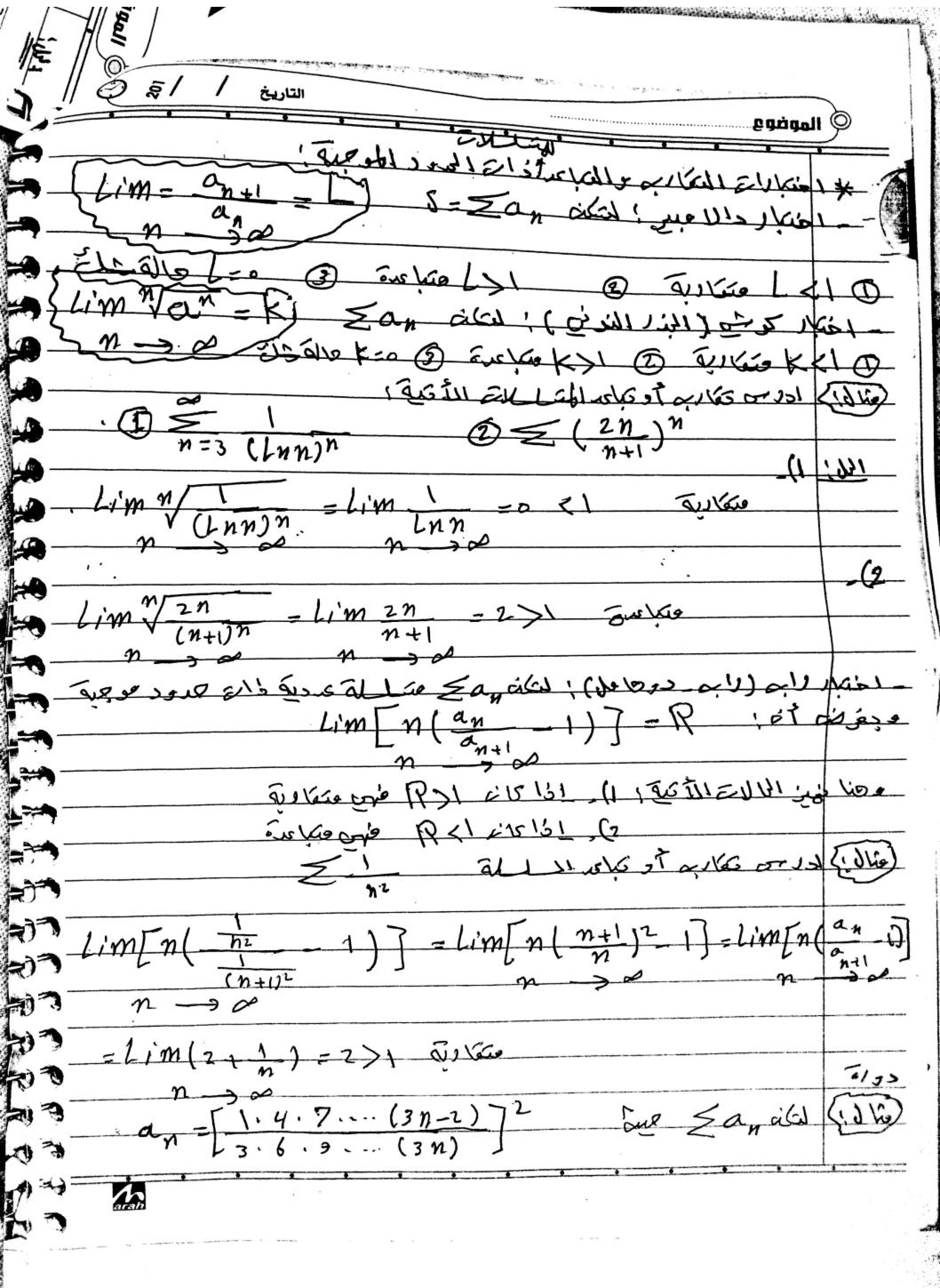
$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \sum \frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$$

الحل: نعلم أن $\sum \frac{1}{n}$ متباعدة

$\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ متباعدة

$$\frac{n+1}{\sqrt{n^3}} > \frac{n}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ متباعدة $\Rightarrow \sum \frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$ متباعدة



المتسلسلات

* اختبارات التقارب والتباعد ذات الحدود الموجبة:

- اختبار دالامبير: لتكن $S=\sum a_n$ ، $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$

① اذا $L<1$ متقاربة ② $L>1$ متباعدة ③ $L=1$ فالفشل

- اختبار كوشي (الجذر النوني): لتكن $\sum a_n$ ، $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n} = K$

① $K<1$ متقاربة ② $K>1$ متباعدة ③ $K=1$ فالفشل

مثال: ادرس تقارب أو تباعد المتسلسلات الآتية:

① $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$ ② $\sum \left(\frac{2n}{n+1}\right)^n$

الحل: 1)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1$$ متقاربة

2)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2n}{(n+1)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2 > 1$$ متباعدة

- اختبار رابه (رابه دوهامل): لتكن $\sum a_n$ متسلسلة عددية ذات حدود موجبة ونفرض أن:

$$\lim_{n\to\infty} \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)\right] = R$$

وهنا نميز الحالات الآتية: 1) إذا كان $R>1$ فهي متقاربة

2) إذا كان $R<1$ فهي متباعدة

مثال: ادرس تقارب أو تباعد المتسلسلة $\sum \frac{1}{n^2}$

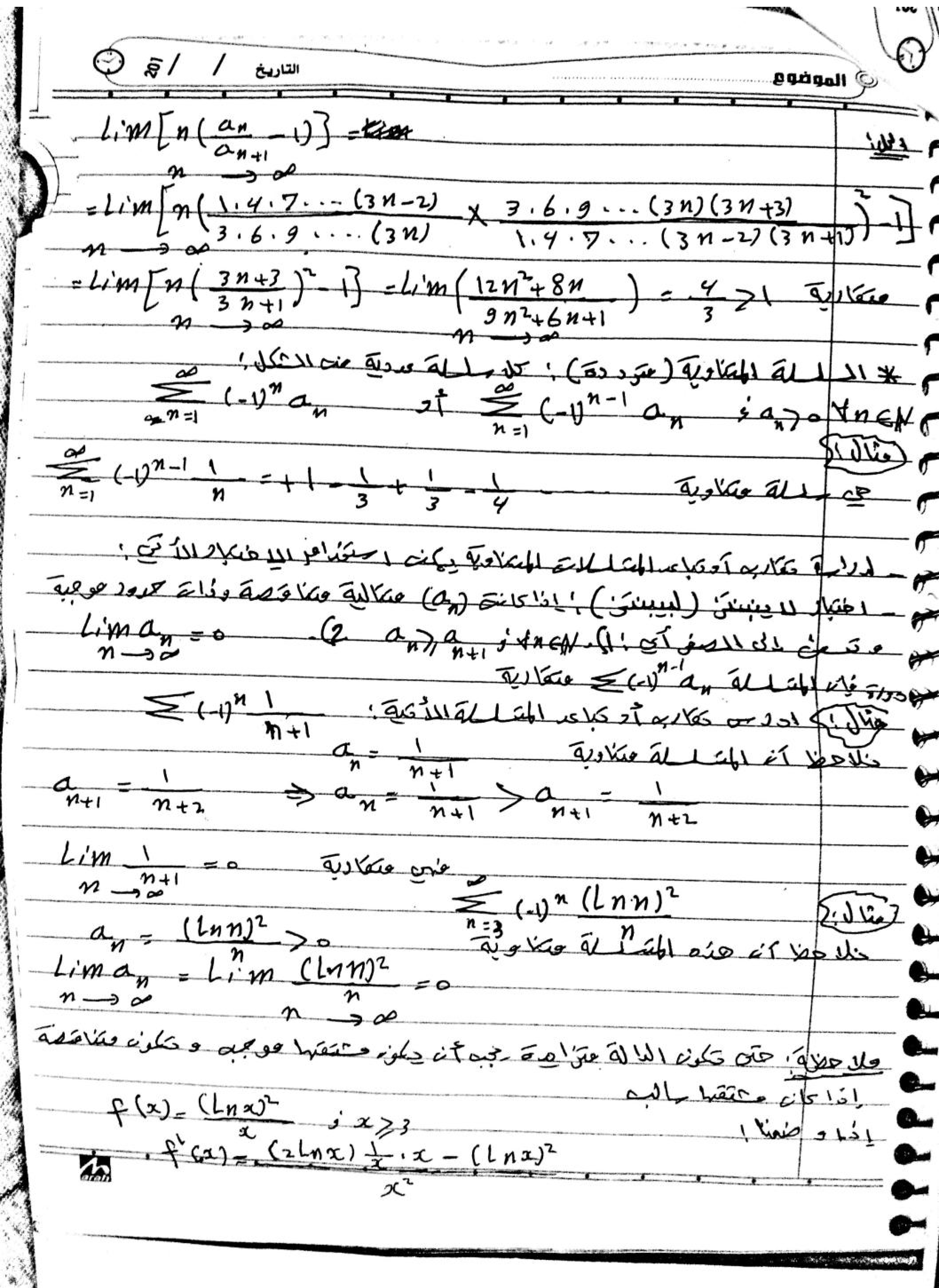
$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} - 1\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 - 1\right] = \lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2 > 1$$ متقاربة

دورة

مثال: لتكن $\sum a_n$ حيث

$$a_n = \left[\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{3\cdot 6\cdot 9\cdots(3n)}\right]^2$$



دليل

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\right] =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{1\cdot4\cdot7\cdots(3n-2)}{3\cdot6\cdot9\cdots(3n)}\times\frac{3\cdot6\cdot9\cdots(3n)(3n+3)}{1\cdot4\cdot7\cdots(3n-2)(3n+1)}\right)^2-1\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{3n+3}{3n+1}\right)^2-1\right]=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{12n^2+8n}{9n^2+6n+1}\right)=\frac{4}{3}>1$$ متقاربة

* السلسلة المتناوبة (متردد): كل سلسلة عددية من الشكل:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \quad \text{أو} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} a_n \quad ; a_n>0 \ \forall n\in\mathbb{N}$$

مثال ١:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=+1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ \cdots$$ هي سلسلة متناوبة

- لدراسة تقارب أو تباعد المتسلسلات المتناوبة يمكن استخدام الاختبار الآتي:
- اختبار لايبنتز (ليبنتز): إذا كانت (a_n) متتالية متناقصة وذات حدود موجبة وتحقق الشرطين الآتيين: 1) $a_n \geq a_{n+1}$; $\forall n\in\mathbb{N}$ 2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

عندئذ تكون المتسلسلة $\sum(-1)^{n-1}a_n$ متقاربة

مثال ٢: ادرس تقارب أو تباعد المتسلسلة الآتية: $\sum(-1)^n\frac{1}{n+1}$

نلاحظ أن المتسلسلة متناوبة $a_n=\frac{1}{n+1}$

$$a_{n+1}=\frac{1}{n+2} \Rightarrow a_n=\frac{1}{n+1}>a_{n+1}=\frac{1}{n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$ فهي متقاربة

مثال ٣: $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{(\ln n)^2}{n}$

نلاحظ أن هذه المتسلسلة متناوبة

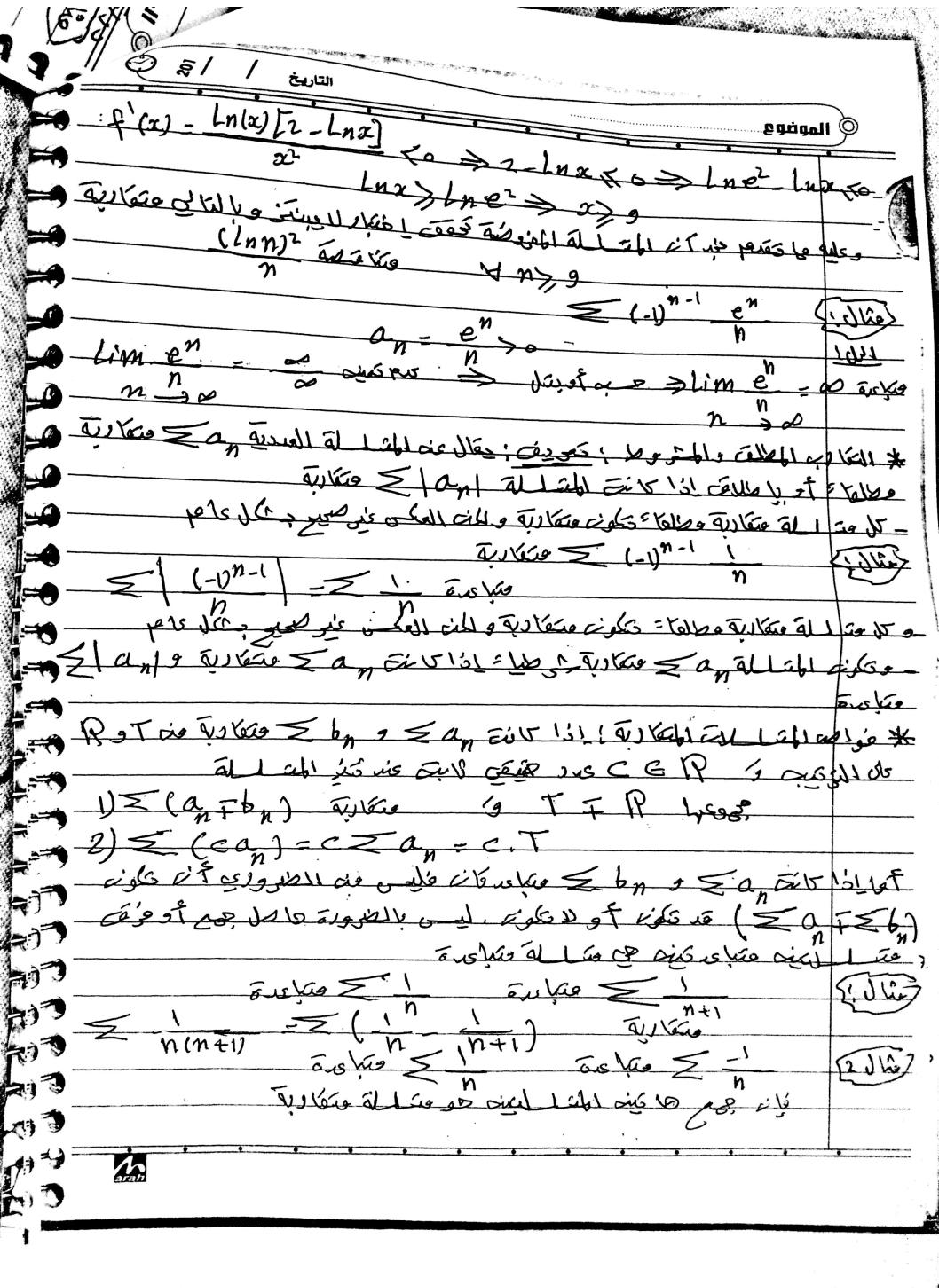
$$a_n=\frac{(\ln n)^2}{n}>0$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)^2}{n}=0$$

ملاحظة: حتى تكون الدالة متناقصة يجب أن يكون مشتقها موجب و تكون متناقصة إذا كان مشتقها سالب إذا وضعنا:

$$f(x)=\frac{(\ln x)^2}{x} \ ; \ x\geq 3$$

$$f'(x)=\frac{(2\ln x)\frac{1}{x}\cdot x-(\ln x)^2}{x^2}$$



$f'(x) = \frac{\ln(x)[2-\ln x]}{x^2} < 0 \Rightarrow 2-\ln x < 0 \Rightarrow \ln e^2 - \ln x < 0$

$\ln x \geq \ln e^2 \Rightarrow x \geq e^2$ و وبالتالي متقاربة

وعليه مما تقدم نجد أن المتسلسلة المفروضة تحقق اختبار لايبنتز وبالتالي متقاربة

$\frac{(\ln n)^2}{n}$ متناقصة $\forall n \geq 9$

مثال: $\sum (-1)^{n-1} \frac{e^n}{n}$

الحل: $a_n = \frac{e^n}{n} > 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n} = \frac{\infty}{\infty}$ غير معينة $\Rightarrow$ حسب لوبيتال $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{1} = \infty$ متباعدة

* التقارب المطلق والمشروط: تعريف: يقال عن المتسلسلة العددية $\sum a_n$ متقاربة مطلقاً أو بإطلاق إذا كانت المتسلسلة $\sum |a_n|$ متقاربة

- كل متسلسلة متقاربة مطلقاً تكون متقاربة والعكس غير صحيح بشكل عام

مثال: $\sum (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ متقاربة

$\sum \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \sum \frac{1}{n}$ متباعدة

و كل متسلسلة متقاربة مطلقاً تكون متقاربة والعكس غير صحيح بشكل عام

- وتكون المتسلسلة $\sum a_n$ متقاربة شرطياً إذا كانت $\sum a_n$ متقاربة و $\sum |a_n|$ متباعدة

* خواص المتسلسلات المتقاربة: إذا كانت $\sum a_n$ و $\sum b_n$ متقاربة من T و R على الترتيب و $c \in \mathbb{R}$ عدد حقيقي ثابت عند تغير المتسلسلة

1) $\sum (a_n \mp b_n)$ متقاربة و مجموعها $T \mp R$

2) $\sum (c a_n) = c\sum a_n = c\cdot T$

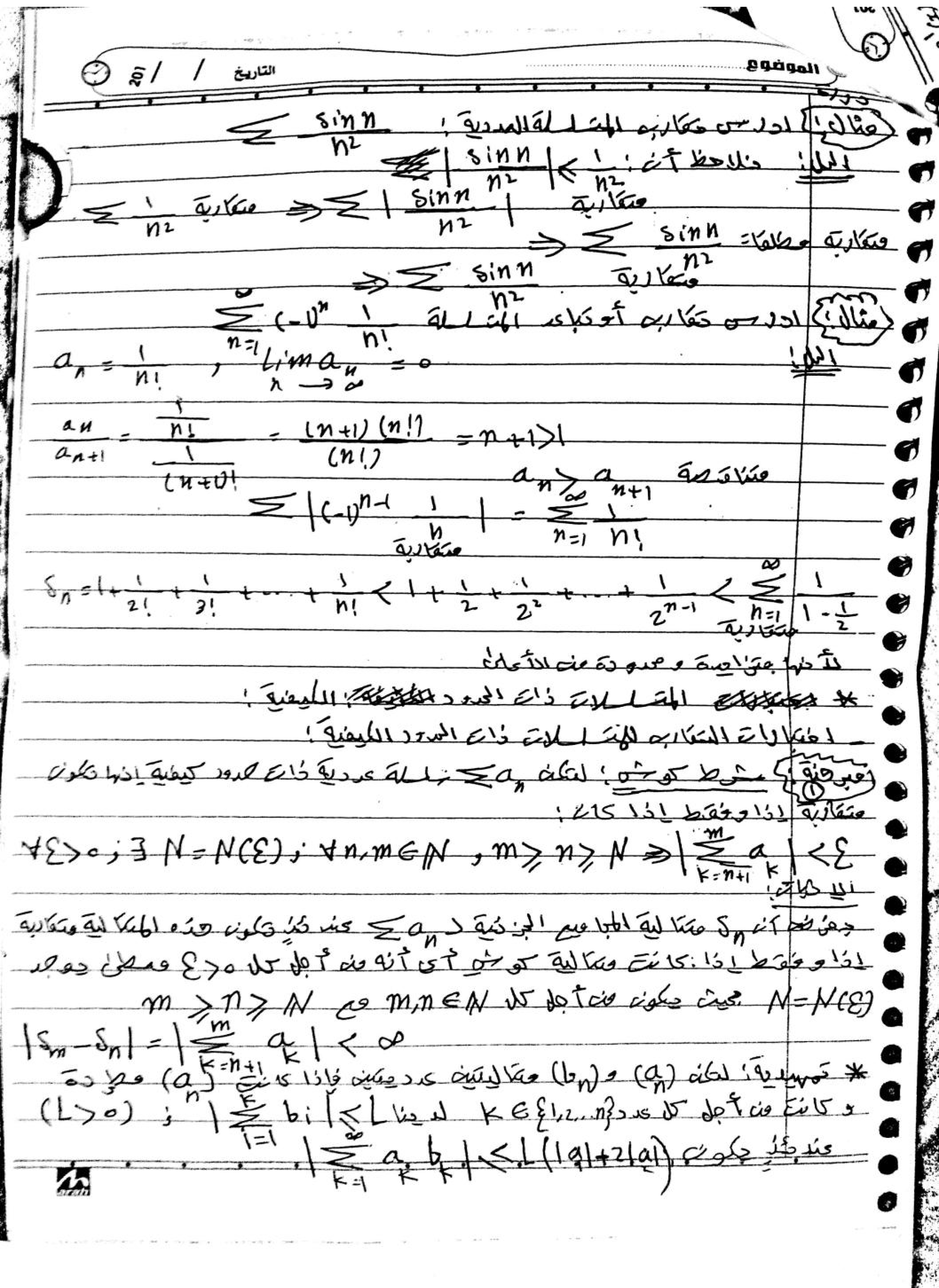
أما إذا كانت $\sum a_n$ و $\sum b_n$ متباعدتان فليس من الضروري أن تكون $(\sum a_n \mp \sum b_n)$ قد تكون أو لا تكون، ليس بالضرورة حاصل جمع أو طرح متسلسلتين متباعدتين هي متسلسلة متباعدة

مثال 1: $\sum \frac{1}{n+1}$ متباعدة، $\sum \frac{1}{n}$ متباعدة

$\sum \frac{1}{n(n+1)} = \sum\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ متقاربة

مثال 2: $\sum \frac{-1}{n}$ متباعدة، $\sum\frac{1}{n}$ متباعدة

فإن جمع هاتين المتسلسلتين هو متسلسلة متقاربة



مثال: ادرس تقارب المتسلسلة: $\sum \frac{\sin n}{n^2}$

الحل: نلاحظ أن: $\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$

$\sum \frac{1}{n^2}$ متقاربة $\Rightarrow \sum \left|\frac{\sin n}{n^2}\right|$ متقاربة

$\Rightarrow \sum \frac{\sin n}{n^2}$ متقاربة مطلقاً

$\Rightarrow \sum \frac{\sin n}{n^2}$ متقاربة

مثال: ادرس تقارب أو تباعد المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}$

الحل:

$a_n = \frac{1}{n!}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \frac{(n+1)(n!)}{(n!)} = n+1 > 1$

$a_n \ge a_{n+1}$ متناقصة

$\sum \left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ متقاربة

$S_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < \sum_{n=1}^{\infty} \dots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$ متقاربة

لأنها متزايدة ومحدودة من الأعلى

* ~~...~~ المتسلسلات ذات الحدود ~~...~~ الكيفية:

- اختبارات التقارب للمتسلسلات ذات الحدود الكيفية:

مبرهنة (1): شرط كوشي: لتكن $\sum a_n$ متسلسلة عددية ذات حدود كيفية، إنها تكون متقاربة إذا وفقط إذا كان:

$\forall \varepsilon > 0 ; \exists N = N(\varepsilon) ; \forall n,m \in \mathbb{N} , m \ge n \ge N \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon$

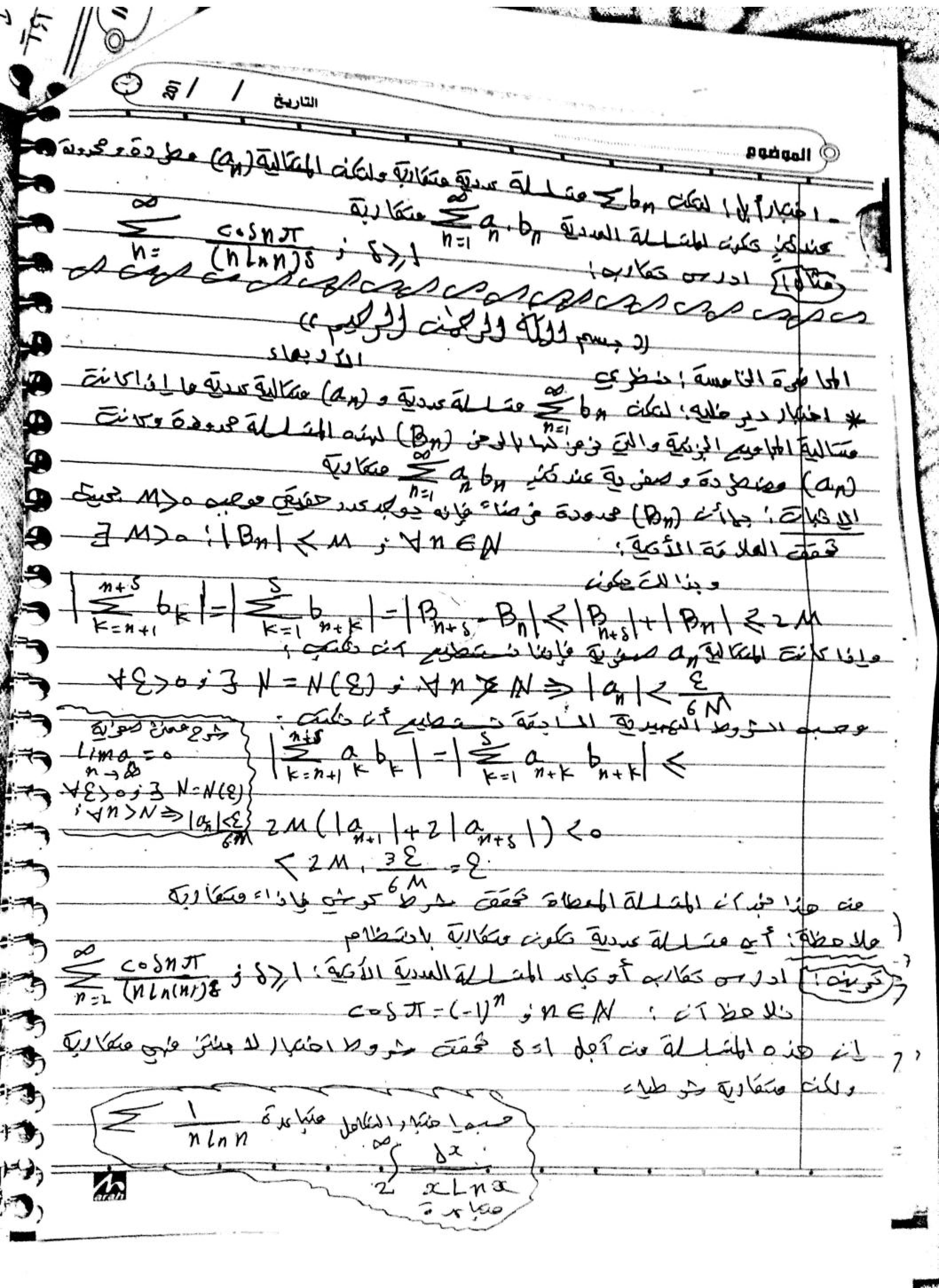
أي أن:

حيث أن S_n متتالية المجاميع الجزئية لـ $\sum a_n$ عندئذٍ تكون هذه المتتالية متقاربة إذا وفقط إذا كانت متتالية كوشي أي أنه من أجل كل $\varepsilon > 0$ معطى يوجد $N = N(\varepsilon)$ بحيث يكون من أجل كل $m,n \in \mathbb{N}$ مع $m \ge n \ge N$

$|S_m - S_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \infty$

* تمهيدية: لتكن (a_n) و (b_n) متتاليتين عدديتين فإذا كانت (a_n) مطردة و كانت من أجل كل عدد $k \in \{1,2,\dots,n\}$ لدينا $\left|\sum_{i=1}^{k} b_i\right| \le L$; $(L > 0)$

عندئذٍ يكون $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \le L(|a_1| + 2|a_n|)$



التاريخ / / 201

الموضوع

ـ1 اختبار أبل: لتكن $\sum b_n$ متسلسلة عددية متقاربة ولتكن المتتالية (a_n) مطردة ومحدودة عندئذٍ تكون المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ متقاربة

مثال 1: ادرس تقاربها: $\sum_{n=}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{(n\ln n)^{\delta}}$ ؛ $\delta \geq 1$

«بسم الله الرحمن الرحيم»

الأربعاء

المحاضرة الخامسة: تذكرة

* اختبار ديريكليه: لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متسلسلة عددية و (a_n) متتالية عددية ما إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية والتي نرمز لها بالرمز (B_n) لهذه المتسلسلة محدودة وكانت (a_n) متناقصة وصفرية عند ذلك $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ متقاربة

الإثبات: بما أن (B_n) محدودة فرضاً فإنه يوجد عدد حقيقي موجب $M>0$ يحقق العلاقة الآتية:

$$\exists M>0 : |B_n| \leq M \; ; \forall n \in N$$

وبالتالي يكون

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+s} b_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{s} b_{n+k}\right| = |B_{n+s} - B_n| \leq |B_{n+s}| + |B_n| \leq 2M$$

وإذا كانت المتتالية a_n صفرية فإننا نستطيع أن نكتب:

$$\forall \varepsilon>0 ; \exists N=N(\varepsilon) ; \forall n \geq N \Rightarrow |a_n| < \frac{\varepsilon}{6M}$$

وحسب الشروط التمهيدية السابقة نستطيع أن نكتب:

شرط صفرية: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ؛ $\forall \varepsilon>0 ; \exists N=N(\varepsilon) ; \forall n>N \Rightarrow |a_n| < \frac{\varepsilon}{6M}$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+s} a_k b_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{s} a_{n+k} b_{n+k}\right| \leq 2M(|a_{n+1}| + 2|a_{n+s}|) < o$$

$$< 2M \cdot \frac{3\varepsilon}{6M} = \varepsilon$$

من هنا نجد أن المتسلسلة المعطاة تحقق شرط كوشي فإذاً متقاربة

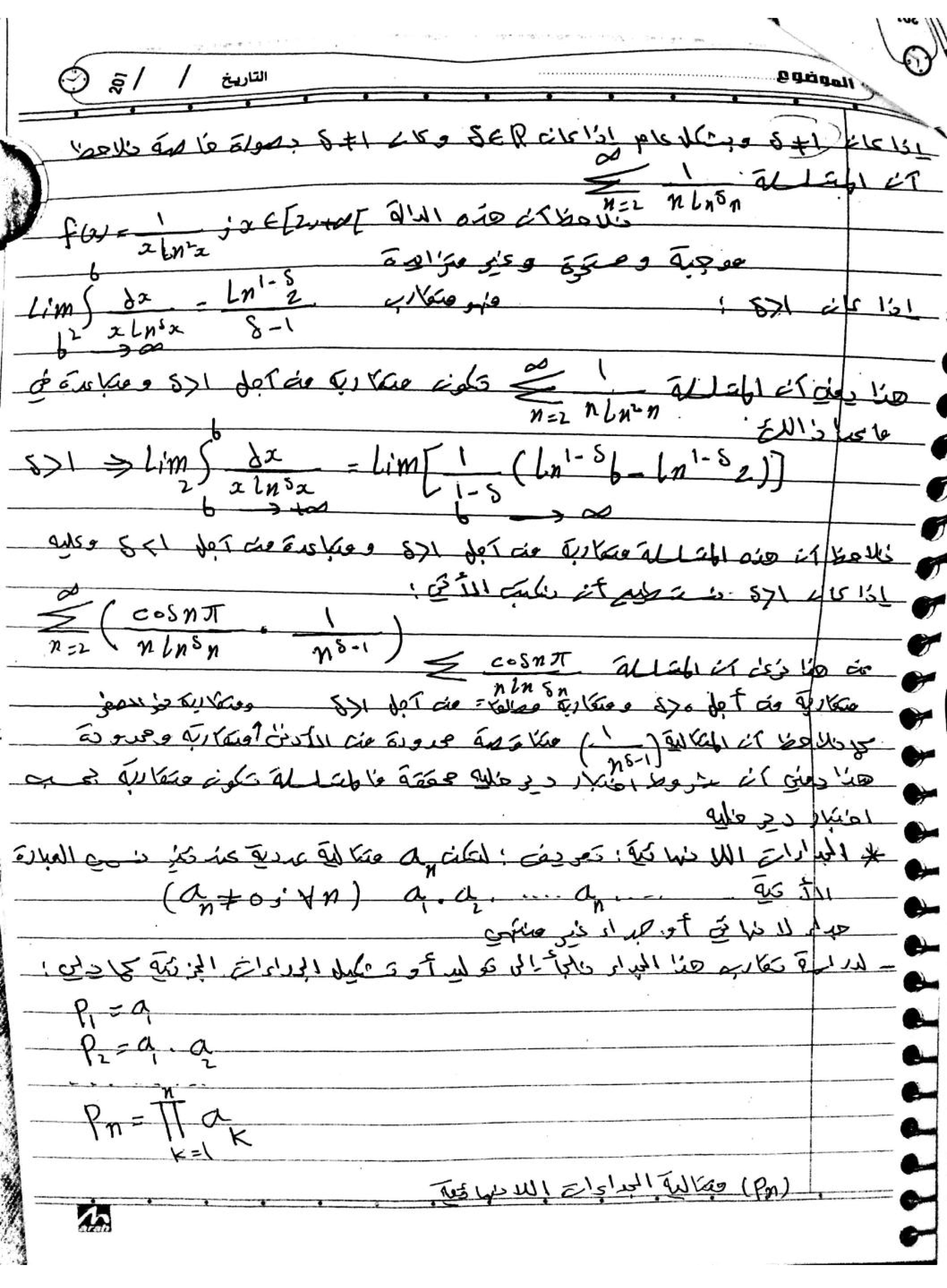
ملاحظة: أي متسلسلة عددية تكون متقاربة بانتظام

تمرين 1: ادرس تقارب أو تباعد المتسلسلة العددية الآتية: $\delta \geq 1$ ؛ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{(n\ln(n))^{\delta}}$

نلاحظ أن: $\cos n\pi = (-1)^n \; ; n \in N$

إن هذه المتسلسلة من أجل $\delta=1$ تحقق شروط اختبار لايبنتز فهي متقاربة ولكن متقاربة شرطياً

$\sum \frac{1}{n\ln n}$ حسب اختبار التكامل متباعدة $\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x\ln x}$ متباعدة



إذا كانت $s \neq 1$ وبشكل عام إذا كانت $s \in \mathbb{R}$ وكانت $s \neq 1$ بسهولة فإننا نلاحظ أن المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^s n}$

نلاحظ أن هذه الدالة $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x} ; x \in [2, +\infty[$

موجبة ومستمرة وغير متزايدة

إذا كانت $s>1$: $\lim_{b \to \infty} \int_2^b \frac{dx}{x \ln^s x} = \frac{\ln^{1-s} 2}{s-1}$ فهو متقارب

هذا يعني أن المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ تكون متقاربة من أجل $s>1$ ومتباعدة في ما عدا ذلك:

$$s>1 \Rightarrow \lim_{b \to \infty} \int_2^b \frac{dx}{x \ln^s x} = \lim_{b \to \infty} \left[\frac{1}{1-s} \left(\ln^{1-s} b - \ln^{1-s} 2 \right) \right]$$

نلاحظ أن هذه المتسلسلة متقاربة من أجل $s>1$ ومتباعدة من أجل $s \leq 1$ وعليه

إذا كان $s>1$ نستطيع أن نكتب الآتي:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\cos n\pi}{n \ln^s n} \cdot \frac{1}{n^{s-1}} \right)$$

من هنا نرى أن المتسلسلة $\sum \frac{\cos n\pi}{n \ln^s n}$ متقاربة من أجل $s>0$ ومتقاربة مطلقا من أجل $s>1$ ومتقاربة حتى الصفر

كما نلاحظ أن المتتالية $\left(\frac{1}{n^{s-1}}\right)$ متناقصة محدودة من الأدنى أي متقاربة ومحدودة

هذا يعني أن شروط اختبار ديرخليه محققة فالمتسلسلة تكون متقاربة حسب اختبار ديرخليه

* الجداءات اللانهائية: تعريف: لتكن a_n متتالية عددية حيث نكتب نسمي العبارة الآتية

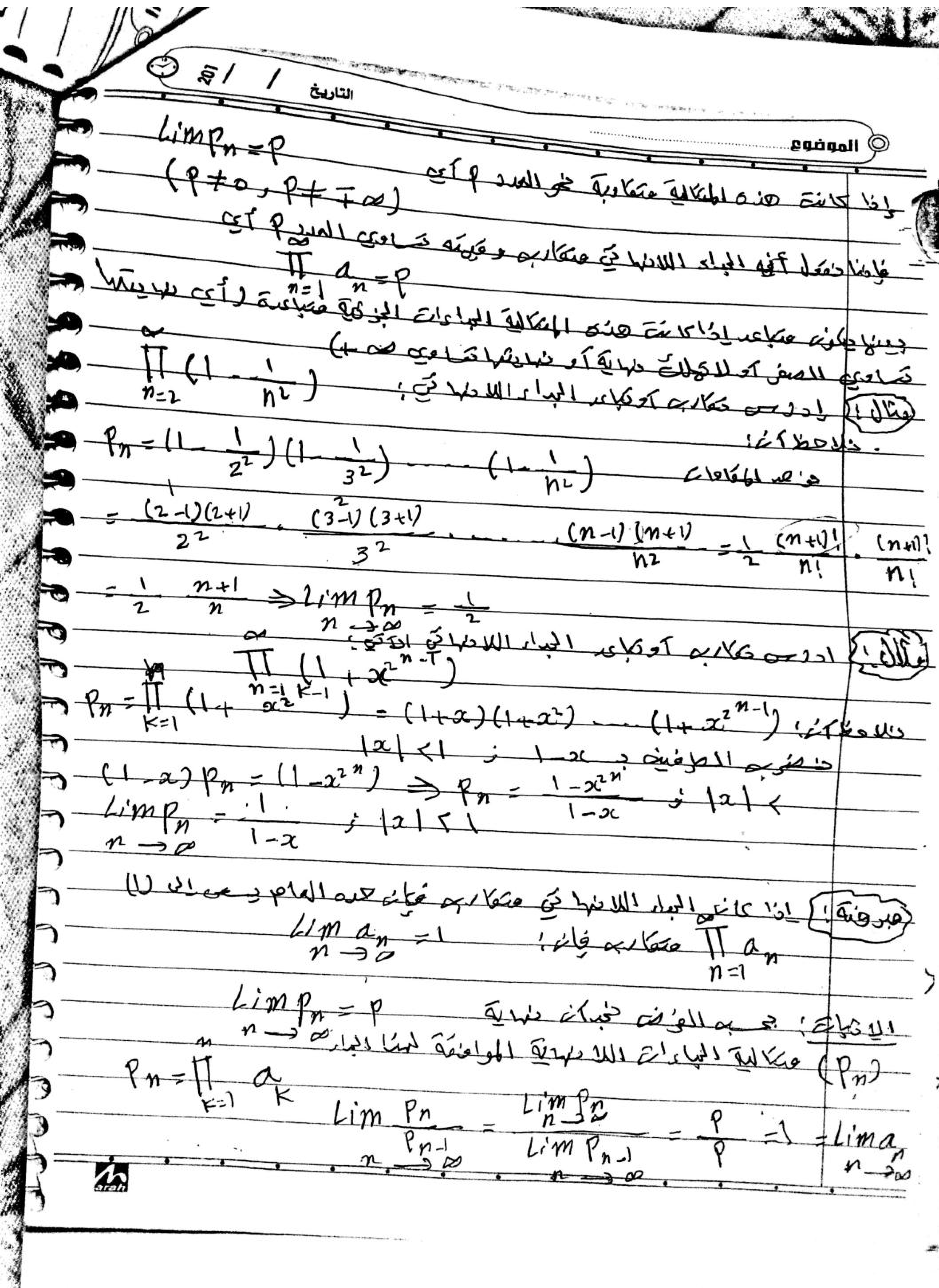
$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \ldots \quad (a_n \neq 0 ; \forall n)$$

جداء لانهائي أو جداء غير منتهي

- لدراسة تقارب هذا الجداء نلجأ إلى تحويله أو تشكيل الجداءات الجزئية كما يلي:

$$P_1 = a_1$$
$$P_2 = a_1 \cdot a_2$$
$$P_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$$

(P_n) متتالية الجداءات اللانهائية.



$$\lim P_n = P$$

إذا كانت هذه المتتالية متقاربة نحو العدد P أي $(P \neq 0 , P \neq \mp\infty)$

فإننا نقول أن الجداء اللانهائي متقارب وقيمته تساوي العدد P أي

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = P$$

ويقال يكون متباعد إذا كانت هذه المتتالية الجداءات الجزئية متباعدة (أي نهايتها تساوي الصفر أو لا توجد نهاية أو نهايتها تساوي $\mp\infty$)

مثال 1: ادرس تقارب أو تباعد الجداء اللانهائي: $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

نلاحظ أن:

$$P_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

هو ضرب المتقاطعات

$$= \frac{(2-1)(2+1)}{2^2}\cdot\frac{(3-1)(3+1)}{3^2}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2}\frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{n!}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{n+1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P_n = \frac{1}{2}$$

مثال 2: ادرس تقارب أو تباعد الجداء اللانهائي الآتي: $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+x^{2^{n-1}}\right)$

نلاحظ أن:

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+x^{2^{k-1}}\right) = (1+x)(1+x^2)\cdots\left(1+x^{2^{n-1}}\right)$$

نضرب الطرفين بـ $1-x$ ؛ $|x|<1$

$$(1-x)P_n = \left(1-x^{2^n}\right) \Rightarrow P_n = \frac{1-x^{2^n}}{1-x} \ ; \ |x|<1$$

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \frac{1}{1-x} \ ; \ |x|<1$$

مبرهنة: إذا كان الجداء اللانهائي متقارب فإن حده العام يسعى إلى الـ 1

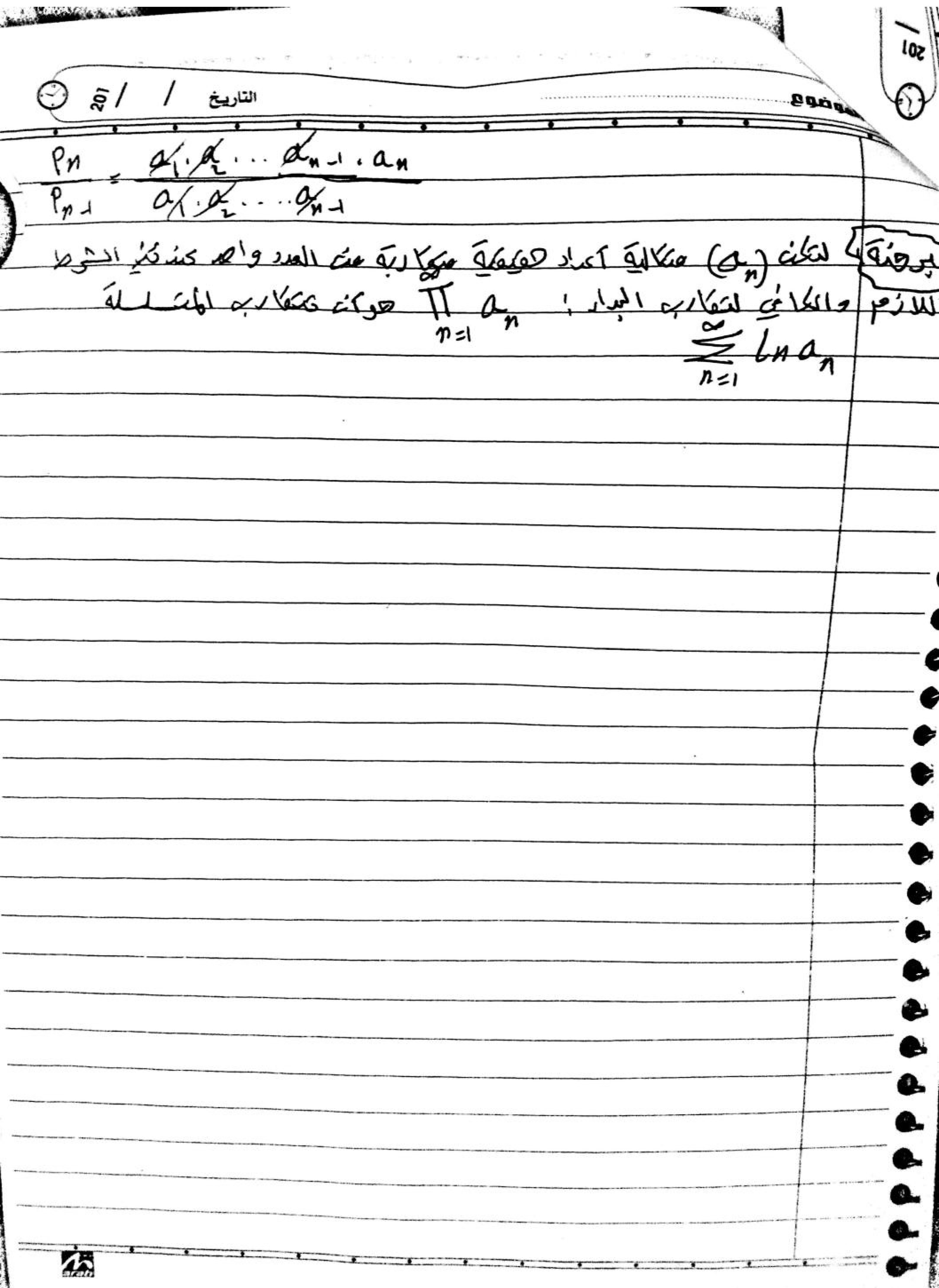
إذا $\prod_{n=1} a_n$ متقارب فإن: $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

البرهان: نحسب الجداءات الجزئية نهاية $\lim_{n\to\infty} P_n = P$

متتالية الجداءات اللانهائية الموافقة لهذا الجداء (P_n)

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{\lim_{n\to\infty} P_n}{\lim_{n\to\infty} P_{n-1}} = \frac{P}{P} = 1 = \lim_{n\to\infty} a_n$$



$$\frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} \cdot a_n}{a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1}}$$

مبرهنة: لتكن (a_n) متتالية أعداد حقيقية متقاربة من العدد واحد عندئذ الشرط اللازم والكافي لتقارب الجداء $\prod_{n=1} a_n$ هو أن تتقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$